

## 링레이저 자이로 3축 단일 디더 형상에 따른 고유 주파수 특성 분석

김천중<sup>1</sup>, 안준은<sup>1</sup>, 유해성<sup>1</sup>, 심규민<sup>1</sup>, 박준민<sup>2†</sup>

## Analysis of Natural Frequency Characteristics According to Type of Cluster Dither with 3-axis Ring Laser Gyroscopes

Cheon Joong Kim<sup>1</sup>, Jun Eon An<sup>1</sup>, Haesung Yu<sup>1</sup>, Kyumin Shim<sup>1</sup>, JunMin Park<sup>2†</sup>

<sup>1</sup>Agency for Defense Development, Daejeon 34022, Korea

<sup>2</sup>Chungnam National University, Daejeon 34134, Korea

### ABSTRACT

The ring laser gyro, a representative optical gyro, has an area where small angular velocity inputs are not measured due to backscattering of the reflector. This area, referred to as a lock-in, is typically removed by applying a very large sinusoidal vibration to the gyro body. A mechanical device that applies sinusoidal vibration to the gyro body is called a dither. Dithers have various shapes depending on the gyro size, and when the gyro optical path is relatively large, a single-axis dither is applied. In the case of a single-axis dither, it is located at the center of the gyro body, but if the optical path of the gyro is small, a cluster dither that simultaneously applies sinusoidal vibration to the 3-axis gyro should be used. In the cluster dither, unlike the single-axis dither, a gyro body tilted at a certain angle is mounted on the spoke of the dither, and the gyro mounting part for mounting the gyro is attached at the end of the spoke. In addition, the dither fixing hole is located in the center of the gyro body in the case of single-axis dither, whereas is located on the outside of the dither in the case of the cluster dither. Therefore, unlike the single-axis dither, the rotation center of the cluster dither does not coincide with the center of the gyro body, but rather is located at the center of the cluster dither. Depending on the shape of the cluster dither, the dither natural frequency varies and a different dither frequency analysis method must be applied. In this paper, we analyze natural frequency characteristics according to the shape of a cluster dither and present the results. We also verify the results through modeling and simulation.

**Keywords:** cluster dither, dither natural frequency, dither spoke, mounting part

**주요어:** 단일 디더, 디더 고유 주파수, 디더 스포크, 장착부

### 1. 서론

대표적인 광학식 자이로인 링레이저 자이로는 반사경의 후방산란에 의해 작은 크기의 외부 인가 각속도가 측정되지 않는 영역이 존재하게 되며, 이를 락인(lock-in) 영역이라고 한다 (Siouris 1993, Aronowitz 1999). 이러한 락인 문제를 해결하는 대표적인 방법은 큰 정현파 진동을 자이로 몸체에 인가하여 외부에서 인가된 각속도가 락인 영역에 머무르는 시간을 최소화하는 것

이다. 디더(dither)에서 인가된 정현파 진동은 자이로 출력을 디더 주기마다 적분하면 제거되므로 이러한 방법을 적용하여 외부 인가 각속도를 측정하게 된다. 이와 같이 자이로 몸체에 정현파 진동을 인가하는 기계적인 장치를 디더라고 하며, 링레이저 자이로의 크기에 따라 다양한 형태의 디더가 구현될 수 있다 (Siouris 1993, Aronowitz 1999). 디더를 이용하여 자이로 몸체에 정현파 진동을 인가하는 방법은, 디더에 부착된 Pb-lead Zirconate Titanate (PZT)에 디더 고유 주파수에 해당하는 전압을 주기적으

Received Oct 29, 2025 Revised Nov 17, 2025 Accepted Nov 24, 2025

<sup>†</sup>Corresponding Author E-mail: jm\_park@cnu.ac.kr



Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

로 인가하여 디더 구조물에 굽힘 모멘트(bending moment)를 발생시키는 것이다. 따라서 디더의 주요 설계 요소는 디더 고유 주파수 및 디더 진폭이 된다. 락인 영역에 머무는 시간을 최소화하여 링레이저 사이로의 랜더워크 성능을 향상시키기 위해서는 디더의 각속도를 증가시켜야 하며, 동일 진폭에서 디더의 각속도를 증가시키는 방법으로 디더의 고유 주파수를 증가시키는 방법이 있다 (Aronowitz 1999). 따라서 링레이저 사이로의 락인 영역이 커지면 이에 맞게 디더의 고유 주파수를 증가시켜야 한다. 일반적으로 광경로 28 cm급 링레이저 사이로의 경우 약 400 Hz, 광경로 16 cm급 링레이저 사이로의 경우 약 600 Hz의 단축 디더 고유 주파수를 가지는 것으로 알려져 있으며 링레이저 사이로의 광경로가 작아질수록 락인 영역이 커지기 때문에 디더의 고유 주파수는 커져야 한다 (Siouris 1993).

일반적으로 1축 디더는 링레이저 사이로 몸체의 중심부에 장착되며, 디더 스포크(spoke)의 끝단에 고정된 사이로 몸체에 정현파 진동이 인가되도록 제작된다. 따라서 1축 디더는 외팔보(clamped-free cantilever)로 모델링 가능하며, 이에 대한 설계 및 분석에 대한 많은 연구가 있었다 (Li 2013, Yu et al. 2013, Xiong et al. 2016, Lee et al. 2002, 2009). 이러한 1축 디더를 링레이저 사이로 3개가 탑재되는 관성측정장치(inertial measurement unit)에 적용할 경우, 3개의 서로 다른 고유 주파수를 가지는 3개의 디더가 축별로 필요하게 된다 (Siouris 1993). 링레이저 사이로에 적용되는 1축 디더는 링레이저 사이로의 광경로가 어느 정도 큰 경우에 일반적으로 사용되며, 링레이저 사이로의 광경로가 작아지는 경우에는 디더 장착에 허용되는 면적이 협소하여 디더 설계 및 제작에 어려움이 따른다. 이를 극복하기 위하여 3축의 사이로 몸체에 기계적 진동을 동시에 인가할 수 있는 단일 디더가 제안되었다 (Hanse 1992). 제안된 단일 디더는 링레이저 사이로 기반 관성측정장치 소형화 설계에 필수적이다. 그러나, 형상만 제안되었지 단일 디더 설계 및 분석에 대한 연구가 진행된 사례는 없었다. 이 논문에서는 링레이저 사이로 기반 관성측정장치에 적용 가능한 단일 디더의 설계 및 형상에 따른 고유 주파수 해석 결과를 제시한다. 앞에서 언급한 바와 같이 단일 디더 고유 주파수는 링레이저 사이로 락인 영역의 크기와 관계가 있기 때문에, 단일 디더의 고유 주파수 설계 요구 규격인 800 Hz를 만족하는 설계와 형상에 따른 고유 주파수 해석 결과를 제시한다.

단일 디더는 3개의 링레이저 사이로가 장착되어야 하기 때문에 3개의 디더 스포크가 디더 중심에서 상호 지지하며, 120도 간격으로 하우징에 장착되도록 설계되었다. 단일 디더의 회전축은 디더 중심에 위치하며, 3개의 링레이저 사이로는 3개의 스포크 사이 공간에 디더 회전축 방향으로 120도 간격으로 회전축과 64도 기울여져 장착된다. 단일 디더의 스포크 한쪽 끝은 디더 회전 중심에서 사이로 장착부와 연결되며, 다른 쪽 끝은 관성측정장치 하우징에 고정된다. 따라서, 1축 디더와는 다르게 지지 외팔보(clamped-supported cantilever)로 모델링이 가능하다. 이와 같이 디더의 형상에 따라 모델링이 달라지므로, 형상에 맞도록 고유 주파수를 해석하는 방법이 달리 적용되어야 한다. 이 논문에서는 지지 외팔보 모델을 이용한 단일 디더 설계 결과를 제시하고, Solidworks를 이용한 M&S 결과와 비교 분석하였다. 또한 단일 디더를 실제 제작하여 평가한 결과를 설계 값과 비교하였다.

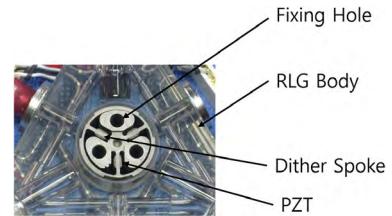


Fig. 1. The picture of typical one-axis dither.

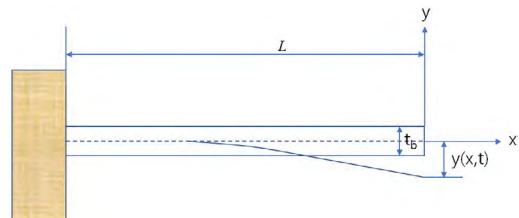


Fig. 2. The configuration of cantilever beam.

## 2. 외팔보 운동 방정식

### 2.1 외팔보 운동 방정식 유도

일반적인 1축 디더는 Fig. 1과 같다. Fig. 1에서 디더는 3개의 흘을 이용하여 링레이저 사이로 하우징에 고정되며, 디더 스포크에 링레이저 사이로 몸체가 고정되도록 제작된다. 그러므로 디더 스포크에 부착된 PZT에 전압을 인가하면 사이로 몸체가 정현파 진동을 하게 된다. 이러한 원리로 디더가 동작되므로 디더 스포크를 Fig. 2와 같은 외팔보(cantilever beam)로 모델링이 가능하다. 외팔보의 횡변위(transverse deflection) 운동 방정식은 Eq. (1)과 같다 (Timoshenko et al. 1974, Lee et al. 2002, Rao 2004).

Eq. (1)에서  $E$ 는 외팔보의 영률(Young's modulus),  $I$ 는 관성 모멘트(moment of inertia),  $\rho$ 는 밀도,  $A$ 는 단면적이며,  $p(x,t)$ 는 외부에서 인가되는 힘이다. 그러나 외팔보의 고유 주파수는 외부에서 인가되는 힘과 무관하므로 Eq. (1)에서  $p(x,t)$ 는 영이라 가정할 수 있다. Eq. (1)에서 외팔보가 고유 주파수를 가지고 일정 진폭으로 진동한다고 가정하면, 횡변위  $y(x, t)$ 는 Eq. (2)와 같다. Eqs. (1, 2)에 변수 분리법을 적용하여  $x$ 에 대한 특성 방정식을 구하면 Eq. (3)과 같다. Eq. (3)에서  $\lambda$ 는 Eq. (4)와 같고, Eq. (4)에 대한 일반해를 구하면 Eq. (5)와 같다. Eq. (5)의 일반해에 대한 계수를 구하기 위해서는 외팔보의 경계조건이 요구되며, 이를 식으로 나타내면 Eqs. (6a, b)와 같다. Eqs. (6a, b)의 외팔보 경계조건은 외팔보가 고정된  $x=0$  지점에서, 횡변위 및 횡변위 기울기(slope)는 각각 0이며, 외팔보의 끝단인  $x=L$  지점에서, 횡변위 모멘트(bending moment)와 전단력(shear force) 또한 각각 0임을 의미한다 (Timoshenko et al. 1974, Lee et al. 2002, Rao 2004). Eq. (5)에서,  $x=0$ 에서의 외팔보 경계조건인 Eq. (6a)에 대하여 방정식을 구하면 Eq. (7)이 계산되며, Eq. (7)을 모두 만족하는 계수를 구하여 Eq. (5)에 대입하면 Eq. (8)과 같다. Eq. (8)에서  $x=L$ 에서의 외팔보 경계조건인 Eq. (6b)를 적용하여 정리하면 Eq. (9)가 계산되며, Eq. (9)의 행렬식(determinant)이 영이 되는  $\lambda L$ 을 구하면 Eq. (10)과 같다. Eq. (10)을 만족하는  $\lambda L$ 은 주기적인 해를 가지는 것으

**Table 1.** Solution of characteristic equation.

Type of beam	Solution of characteristic equation	$(\lambda L)$
Clamped-free	$\text{chsh } \lambda L \cos \lambda L = -1$	$0.596864\pi$
Clamped-clamped	$\text{chsh } \lambda L \cos \lambda L = 1$	$1.50562\pi$
Clamped-supported	$\tan \lambda L - \tanh \lambda L = 0$	$1.249876\pi$
Supported-supported	$\cos \lambda L = 0$	$\pi$

로 나타나기 때문에 1차로 만족하는 값을 구하면  $0.596864\pi$ 가 된다. Eq. (4)를  $f_n$ 에 대하여 정리하면 Eq. (11)과 같고 Eq. (11)에 Eq. (10)을 만족하는  $\lambda L$ 을 대입하면 외팔보의 고유 주파수  $f_n$ 이 구해진다.

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t + \psi) \quad (2)$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \lambda^4 Y = 0 \quad (3)$$

$$\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (4)$$

$$Y(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) \quad (5)$$

$$Y(0) = 0, \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0, \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=L} = 0 \quad (6b)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$Y(x) = c_1 (\sin(\lambda x) - \sinh(\lambda x)) + c_3 (\cos(\lambda x) - \cosh(\lambda x)) \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2(\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)) & -\lambda^2(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L)) \\ -\lambda^3(\cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L)) & \lambda^3(\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

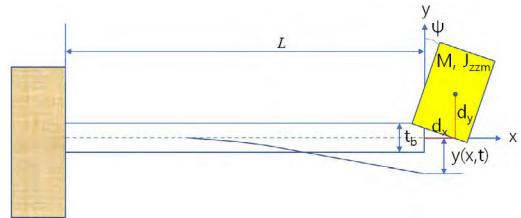
$$\cosh \lambda L \cos \lambda L = -1 \quad (10)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} (\lambda L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (11)$$

Eq. (11)에서 중량  $m$ 은 디더 스포크의 무게  $\rho AL$ 로 계산된다. 외팔보는 다양한 경계조건을 가진다. Fig. 1의 외팔보에서 양쪽을 모두 고정할 경우에는 Eq. (12)의 경계조건, 왼쪽 부분은 고정하고 오른쪽 부분은 지지하는 경우에는 Eq. (13)과 같은 경계조건, 양쪽을 모두 지지하는 경우에는 Eq. (14)와 같은 경계조건을 가진다. Eqs. (6a, b)와 Eqs. (12-14)의 경계조건에 Eq. (5)를 대입하고 Eq. (9)와 같은 방정식을 유도하여 행렬식이 영이 되는  $\lambda L$ 을 구하여 정리하면 Table 1과 같다 (Rao 2004). Table 1은 외팔보의 경계조건에 따라 고유 주파수가 크게 달라짐을 보여주고 있다.

$$Y(0) = 0, \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0, Y(L) = 0, \frac{dY}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (12)$$

$$Y(0) = 0, \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0, Y(L) = 0, \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (13)$$

**Fig. 3.** The configuration of cantilever beam with an end mass.

$$Y(0) = 0, \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, Y(L) = 0, \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (14)$$

## 2.2 외팔보 끝단에 물체가 부착된 경우 운동 방정식 유도

2.1절에서 외팔보 자체에 대한 고유 주파수 계산식을 유도하였다. 그러나 단일 디더의 경우  $x=L$ 의 외팔보 끝단에 사이로 물체가 고정되어 있으므로, 이를 고려한 외팔보의 고유 주파수 계산이 요구된다. 이번 절에서는 Fig. 3과 같이 외팔보의 끝단에 무게  $M$ 이고 관성 모멘트  $J_{zzm}$ 인 물체가 부착된 경우에 대한 운동 방정식을 유도한다. 부착된 물체의 무게 중심은 외팔보 끝단의 좌표와  $x$  방향으로  $d_x$ ,  $y$  방향으로  $d_y$ ,  $z$  방향으로  $d_z$  만큼 이격되어 있다고 가정하였다. 또한 사이로 물체가 단일 디더의 회전축 기준으로 기울어져 장착되는 것을 고려하여 외팔보 끝단 장착 물체가  $z$ 축 방향으로  $-\psi$  만큼 회전한 상태로 장착되었다고 가정하였다. 이를 그림으로 나타내면 Fig. 3과 같다.

Fig. 3과 같은 clamped-free 외팔보의 고유 주파수 계산을 위해서는 새로운 방정식의 유도가 필요하다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 외팔보 자체는 Fig. 2와 동일하므로 Eqs. (1-5)는 동일하게 적용 가능하다. 그러나 외팔보 끝단에 물체가 부착되므로  $x=L$  지점의 경계조건이 달라진다. 따라서, Eqs. (6a, b)가 새롭게 유도되어야 한다.  $x=L$  지점의 경계조건은 끝단에 부착된 물체의 의해 발생되는 횡변위 모멘트와 전단력이 외팔보 자체의 횡변위 모멘트 및 전단력과 동일하다고 가정한다. 이를 수식으로 나타나면 Eqs. (15, 16)과 같다 (Bhat & Kulkarni 1976, Anderson et al. 1978, Lei et al. 2021). Eqs. (15, 16)에 Eq. (2)를 대입하여 횡방향 변위에 대한 경계조건을 유도하면 Eqs. (17, 18)과 같다.

$$EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - M d_x \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (15)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + J_{zz} \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} + M d_x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

$$EI \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} + M \omega^2 Y(x) + M d_x \omega^2 \frac{dY(x)}{dx} = 0 \quad (17)$$

$$EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - J_{zz} \omega^2 \frac{dY(x)}{dx} - M d_x \omega^2 Y(x) = 0 \quad (18)$$

여기서  $M$ 은 끝단 물체의 무게,  $J_{zz}$ 는 외팔보 끝단을 중심축으로 하여 끝단 물체의  $z$ 축 방향의 관성 모멘트이다. 그러나 끝단 물체의 무게 중심이 외팔보 끝단과 거리 벡터  $d=[d_x \ d_y \ d_z]$  만큼 이격되어 있고  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 축 방향으로 각각  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$ 의 각 회전이 있는 경우에는 평행축 정리(parallel axis theorem) 및 좌표변환행렬

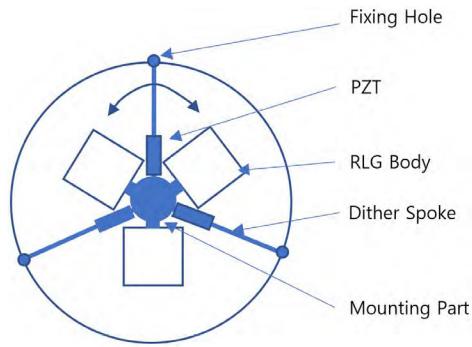


Fig. 4. The shape of cluster dither.

$C_{bm} = R(\phi)R(\theta)R(\psi)$ 을 이용하여 Eq. (19)와 같이 끝단 물체의 장착축 기준의 관성 모멘트가 계산된다 (Rao 2004). Eq. (19)에서  $J_m$ 은 끝단 부착 물체의 관성 모멘트 행렬,  $d$ 는 이격거리 벡터,  $I_{3 \times 3}$ 은 단위 행렬을 의미한다. Eq. (19)에서 계산된 관성 모멘트를 Eqs. (17, 18)에 대입하고  $x=0$  지점의 경계조건을 만족하는 Eq. (8)의 변위식을 Eqs. (17, 18)에 대입하여 Eq. (8)의 계수  $c_1, c_3$ 에 대해서 정리하면 Eq. (20)과 같다. Eq. (20)을 구성하는 변수를 정리하면 Eqs. (21-23)과 같다. Fig. 3의 외팔보 고유 주파수는 2.1절에서 제시한 계산 방법과 동일한 방법으로 Eq. (20)의 행렬식이 영이 되는  $\lambda L$ 을 구하고, 이를 Eq. (11)에 대입하여 정리하면 끝단에 물체가 부착된 외팔보의 고유 주파수 계산이 가능하다.

$$J = C_m^b J_m C_b^m + M(d d^T I_{3 \times 3} - d^T \cdot d) \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -G_2(L) + \mu_M \lambda L F_1(L) + \mu_d \lambda^2 L^2 F_2(L) & F_1(L) + \mu_M \lambda L F_2(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 G_1(L) \\ -G_1(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 F_2(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 F_1(L) & -G_2(L) + \mu_J \lambda^3 L^3 G_1(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 F_2(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$F_1(x) = \sin(\lambda x) - \sinh(\lambda x), \quad F_2(x) = \cos(\lambda x) - \cosh(\lambda x) \quad (21)$$

$$G_1(x) = \sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x), \quad G_2(x) = \cos(\lambda x) + \cosh(\lambda x) \quad (22)$$

$$\mu_M = \frac{M}{\rho A L}, \quad \mu_d = \frac{M_d}{\rho A L^2}, \quad \mu_J = \frac{J}{\rho A L^3} \quad (23)$$

동일한 방법으로 지지 외팔보에 대해서 고유 주파수 계산이 가능하나, 지지 외팔보의 경우  $x=L$  지점의 경계조건이 외팔보와는 다르기 때문에 새로이 유도하여야 한다. 외팔보의 경계조건인 Eqs. (15, 16)은 외팔보 끝단에서 전단력 및 모멘트의 평형이 성립하는 것을 가정하고 있다. 그러나, 지지 외팔보의 경우에는 끝단에서 회전만 가능하고 움직임은 없는 고정된 상태이므로 Eq. (14)의  $Y(L)=0$ 이라는 조건이 성립한다. 따라서  $Y(L)$ 의 시간에 대한 이차 미분항도 영이 되므로 이 조건을 Eqs. (15, 16)에 대입하여 지지 외팔보의 경계조건을 새로이 구하면 Eqs. (24, 25)와 같다. Eqs. (24, 25)에 Eq. (8)을 대입하여 정리하면 Eq. (26)과 같다.

$$EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} - M_d \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (24)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + J_{zz} \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (25)$$

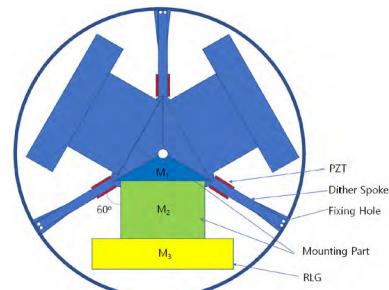


Fig. 5. The total top view of cluster dither.

$$\begin{bmatrix} -G_2(L) + \mu_d \lambda^2 L^2 F_2(L) & F_1(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 G_1(L) \\ -G_1(L) - \mu_d \lambda^2 L^2 F_2(L) & -G_2(L) + \mu_J \lambda^3 L^3 G_1(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

지지 외팔보의 고유 주파수도 Eq. (26)의 행렬식이 영이 되는  $\lambda L$ 을 구하고 이를 Eq. (11)에 대입하여 정리하면, 끝단에 물체가 부착된 경우의 지지 외팔보 고유 주파수 계산이 가능하게 된다.

### 3. 단일 디더 형상 설계

1축 디더는 다수의 디더 스포크 끝에 자이로 몸체 1개가 고정되며, 디더 회전중심은 디더 고정부 중심과 일치한다. 단일 디더는 관성축정장치를 구성하는 3개의 자이로 몸체에 정현파 진동을 동시에 인가하기 위해 1축 디더와는 다른 형상을 가진다. 단일 디더의 한 예로, 3축의 자이로 몸체를 120도 간격으로 사면체 뿔 형태가 되도록 기울여 각각의 spoke 끝단에 장착하는 형상은 Hanse (1992)이 제안하였다. 이번 장에서는 Hanse (1992)이 제안한 단일 디더 형상을 기반으로 단일 디더에 탑재되는 자이로 크기를 고려하고, 요구 주파수를 만족하는 단일 디더 형상 설계 과정을 제시한다. 단일 디더의 개략적인 형상은 Fig. 4와 같다.

단일 디더의 크기는 단일 디더를 적용할 관성축정장치의 외경이 확정되어 있어, 이를 고려하여 설계되었다. 단일 디더의 spoke는 자이로 몸체 3개가 장착되도록 3개로 구성되며, 소형 링레이저 자이로 탑재를 위해 스포크의 끝단에 장착부가 추가되었다. 자이로 장착부는 기계 가공이 용이하도록 사각형 형태로 설계되었다. 단일 디더에 탑재되는 자이로는 앞에서 언급한 바와 같이 120도 간격을 두고 기울여 장착되도록 설계되었으며, 단일 디더는 관성축정장치의 하우징에 6개의 나사로 고정되도록 설계하였다. 스포크에 고정되는 PZT에 디더 고유 주파수에 해당하는 전압이 주기적으로 인가되고, 디더의 진폭을 최대화하기 위해 PZT는 디더의 회전중심에 가깝게 부착되었다.

설계된 단일 디더의 개략적인 상부 모습은 Fig. 5와 같다. Fig. 5에서 자이로 장착부는 크게 디더를 상호 지지하는 M1과 자이로를 장착하는 M2로 구성되어 있으며, M3은 링레이저 자이로이다. 디더 스포크는 고유 주파수 요구규격인 800 Hz 이상을 만족하기 위하여 스포크의 영률을 높여 고유 주파수를 요구 규격에 맞도록 조절하기 위해, 디더 고정부에서 회전중심 방향으로 테이퍼(tapered) 지도록 설계하였다.

Fig. 5에 나타낸 바와 같이 단일 디더는 3개의 동일한 구조물이 회전 중심에서 상호 지지하는 형상으로 구성되므로, 1개의 디더

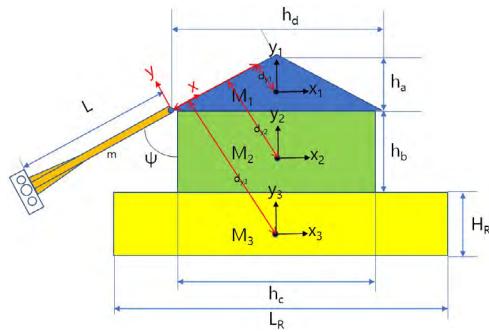


Fig. 6. The 1-axis top view of cluster dither.

구조물에 대한 고유 주파수 해석을 통하여 단일 디더 전체의 고유 주파수를 구할 수 있다. 이를 위하여 1개 스포크 끝단의 자이로 장착부 및 자이로의 세부 모델링을 수행하면 Figs. 6, 7과 같다.

Figs. 6과 7의 디더 스포크 끝단에 부착된 물체로 단일 디더 고유 주파수 해석을 수행하기 위해서는 Eqs. (15-18)에서 요구되는 계수의 계산이 필요하다. 우선  $M_1$  모델에 대한 무게( $m_{a1}$ )와 관성 모멘트( $J_{zz1}$ )를 구하면 Eqs. (27, 28)과 같고,  $M_2$  모델에 대한 무게와 관성 모멘트 구하면 Eqs. (29, 30)과 같다.  $M_3$  모델은 링레이저 자이로에 해당하며, 디더와는 다른 재질로 제작된다. 링레이저 자이로는 육면체의 모양이나 외관에 많은 광학 부품들이 부착되어 있고, 링레이저 자이로를 장착부에 고정하는 볼트(mb)를 포함한 무게는 Eq. (31)과 같다. 링레이저 자이로의 관성 모멘트는 링레이저 자이로를 육면체로 가정하여 축별 관성 모멘트를 구한 다음, z축 방향으로  $\psi$ , y축 방향으로  $\theta$  각만큼 회전시킨 관성 모멘트를 Eq. (19)를 이용하여 구하면 Eq. (32)와 같다. Eqs. (16, 17)을 구성하는 계수인  $M$ ,  $J_{zz}$ 는 Figs. 6과 7의 구성품  $M_1$ ,  $M_2$  및  $M_3$  모델 각각의 모멘트 및 무게의 합으로 정리하면 Eq. (33)과 같다.

$$m_{a1} = \frac{\rho_b h_a h_w}{2} \quad (27)$$

$$J_{zz1} = \frac{m_{a1}}{18} \left( h_a^2 + \frac{3}{4} h_d^2 \right) + m_{a1} (d_{x1}^2 + d_{y1}^2) \quad (28)$$

$$m_{a2} = \frac{\rho_b h_c h_w}{2} \left( h_a - \frac{h_w}{\tan \psi} \right) \quad (29)$$

$$J_{zz2} = \frac{m_{a2}}{12} (h_b^2 + h_c^2) + m_{a2} (d_{x2}^2 + d_{y2}^2) \quad (30)$$

$$m_{a3} = \rho_R L_R W_R H_R + m_b \quad (31)$$

$$J_{zz3} = \frac{m_{a3}}{12} \left( (L_R^2 + H_R^2) \sin^2(\theta) \cos^2(\psi) + (H_R^2 + W_R^2) \sin^2(\theta) \sin^2(\psi) \right. \quad (32)$$

$$\left. + (L_R^2 + W_R^2) \cos^2(\theta) \right) + m_{a3} (d_{x3}^2 + d_{y3}^2)$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^3 J_{zzi} \quad M = \sum_{i=1}^3 m_{ai} \quad (33)$$

Fig. 5에서 디더 스포크의 상세 설계 결과를 그림으로 나타내면 Fig. 8과 같다. 그림에서 나타난 바와 같이 디더 스포크는 디더의 고유 주파수를 증가시키기 위해 테이퍼진 형상이며, 서로 다른 재질로 제작된 구성품이 결합된 형태이므로 외팔보의 고유 주파

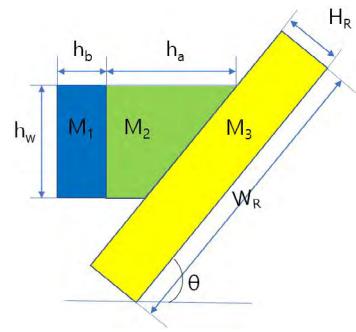


Fig. 7. The 1-axis side view of mounting part &amp; RLG in a cluster dither.

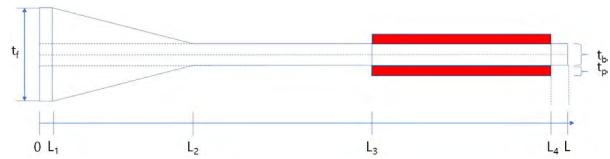


Fig. 8. The top view of dither spoke in a cluster dither.

Table 2. Equations related to dither spoke.

Length of cantilever	Thickness	Mass
$0 \leq x \leq L_1$	$t_1(x) = t_f$	$m_{s1} = \rho_b t_f + h L_1$
$L_1 \leq x \leq L_2$	$t_2(x) = t_f + \frac{t_b - t_f}{L_2 - L_1} (x - L_1)$	$m_{s2} = t_f + \frac{\rho_b (t_f + t_b) h (L_2 - L_1)}{2}$
$L_2 \leq x \leq L_3$	$t_3(x) = t_b$	$m_{s3} = (\rho_b t_b + 2 \rho_p t_p) h (L_3 - L_2)$
$L_3 \leq x \leq L_4$	$t_4(x) = t_b + 2t_p$	$m_{s4} = (\rho_b t_b + 2 \rho_p t_p) h (L_4 - L_3)$
$L_4 \leq x \leq L_1$	$t_5(x) = t_b$	$m_{s5} = \rho_b t_b h (L_2 - L_1)$

수 계산에 필요한 계수인 영률( $E$ ) 및 관성 모멘트( $I$ )를 구하기 위한 새로운 방법이 요구된다. 이종 물질이 결합되고 형상이 일정한 경우, 등가  $E$ 는 Eq. (34)와 같이 계산이 가능하다. Eq. (34)에서  $E_b$ 는 외팔보의 영률,  $E_p$ 는 PZT의 영률이며,  $t_p$ 는 PZT의 두께,  $t_b$ 는 외팔보의 두께를 나타낸다. 또한  $I_b$ ,  $I_p$ 는  $L_3$ ~ $L_4$  구간에서의 외팔보 및 PZT의 관성 모멘트를,  $I$ 는  $L_3$ ~ $L_4$  구간에서의 전체 관성 모멘트를 의미한다. 이를 수식으로 나타내면 Eq. (35)와 같다. Eqs. (34, 35)를 이용하여  $L_3$ ~ $L_4$  구간에서의 등가 영률을 구하면 Eq. (36)과 같다. 따라서 Fig. 8의 외팔보 전체에 대한 구간별 영률이 구해진다. 그러나 외팔보의 관성 모멘트  $I$ 는 외팔보가 Fig. 8과 같이 구간마다 형상이 다르기 때문에 새로운 등가  $I$ 를 계산하는 방법이 요구된다. 이 논문에서는 에너지 등가 법을 이용하여 외팔보 전체의 등가  $EI$  (flexural rigidity)를 계산하는 방법을 제시한다 (Rao 2004). 이를 위해서는 먼저 Fig. 8의 외팔보 구간별 두께 및 무게가 요구되며 이를 정리하면 Table 2와 같다. Table 2에서  $h$ 는 외팔보의 깊이를 의미하며,  $\rho_b$ ,  $\rho_p$ 는 각각 외팔보 및 PZT의 밀도를 나타낸다. Table 2에서 정리된 외팔보의 두께와 깊이 정보를 알면 Eq. (37)을 이용하여 각 구간별 관성 모멘트 계산이 가능하다.

에너지 등가법은 외팔보 전체의 변형 에너지와 각 구간별 변형 에너지의 합이 동일하다는 가정을 이용하여 등가  $EI$ 를 계산하는 방법으로 이를 식으로 나타내면 Eq. (38)과 같다 (Rao 2004, Moon & Hong 2008). Eq. (38)에 외팔보 구간별 영률 및 관성 모멘트인 Eqs. (36, 37)을 대입하여 정리하면 Eq. (39)와 같이 Fig. 8

**Table 3.** Parameter of Eq. (40).

No. of model	Type of cluster dither model	Boundary condition	Parameter of Eq. (40)					$(EI)_{eq}$
			a	b	c	d	e	
1		Eqs. (6a, b)	0	0	6	-4	1	66.23
2	Clamped-free	Eqs. (6a, 17, 18)	0	0	100	-54	13	54.31
3		Eq. (13)	0	0	3	-5	2	40.21
4	Clamped-supported	Eqs. (6a, 24, 25)	0	0	11	-18	7	38.30

의 외팔보의 등가 EI가 계산된다. Eq. (4)에서  $Y(x)$ 는 변위 함수로 일반해는 Eqs. (5, 8)과 같으나 계산의 어려움으로 일반적으로 외팔보의 경계조건을 만족하는 다항식 형태로  $Y(x)$ 를 모델링하여 적용한다. 이 논문에서는 4차 다항식으로  $Y(x)$ 를 Eq. (40)과 같이 모델링 하였다. Eq. (40)에서 A는 진폭으로 Eq. (40)의 계수 a, b, c, d, e의 결정에 영향을 미치나 Eq. (39)의 분모/분자 항에 동일하게 계산되기 때문에 상호 상쇄된다. 따라서 등가 EI 계산에는 영향이 없다.

$$E_{bp}I_t = E_bI_b + 2E_pI_p \quad (34)$$

$$I_b = \frac{ht_b^3}{12}, \quad I_p = \frac{ht_p^3}{12} + ht_p \left( \frac{t_b + t_p}{2} \right)^2, \quad I_t = \frac{h(t_b + 2t_p)^3}{12} \quad (35)$$

$$E_{bp} = \frac{E_b t_b^3 + E_p (8t_p^3 + 12t_p^2 t_b + 6t_p t_b^2)}{t_b^3 + 8t_p^3 + 12t_p^2 t_b + 6t_p t_b^2} \quad (36)$$

$$I_i = \frac{ht_i(x)^3}{12} \quad (37)$$

$$(EI)_{eq} = \frac{\int_0^L E(x)I(x) \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx} \quad (38)$$

$$(EI)_{eq} = \frac{\int_0^L E_b I_b \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L E_p I_p \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L E_s I_s \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L E_w I_w \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L E_t I_t \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left( \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx} \quad (39)$$

$$Y(x) = A \left( a + b \left( \frac{x}{L} \right) + c \left( \frac{x}{L} \right)^2 + d \left( \frac{x}{L} \right)^3 + e \left( \frac{x}{L} \right)^4 \right) \quad (40)$$

#### 4. 단일 디더 형상에 따른 고유 주파수 특성 분석

3장의 단일 디더의 형상 설계 결과를 기반으로 이번 장에서는 단일 디더의 고유 주파수 특성 분석 결과를 제시한다. 단일 디더의 고유 주파수는 기본적으로 Eq. (11)을 이용하여 구해진다. 그러나 Eq. (11)의 값은 단일 디더의 경계조건에 따라 계산 방법이 상이함을 3장에서는 보여주고 있기 때문에, 다양한 경계조건에서의 단일 디더 주파수 계산 결과를 이번 장에서는 제시한다.

단일 디더의 고유 주파수 계산에 필요한 Eq. (11)의 변수에서 E, I, L, m은 단일 디더 스폴크 형상 및 재질에 의해 결정되며,  $\lambda L$ 은 Table 1과 같이 경계조건에 의해 결정되는 변수이다. 따라서

Eq. (11)의 정확도는 각각의 구성하는 변수의 계산 정확도에 의해 단일 디더 고유 주파수의 계산 정확도가 결정된다고 할 수 있다.

단일 디더는 Figs. 5와 6에서 나타난 바와 같이 3개의 동일한 디더 스폴크, 사이로 장착부( $M_1, M_2$ ), 링레이저 자이로( $M_3$ )로 구성된다. Eq. (11)에서 디더 스폴크의 길이  $L$ 은 관성축정장치의 외경 및 링레이저 자이로의 배치를 고려하여 정해지며 무게  $m$ 은 디더 재질을 SUS304로 정했기 때문에 SUS304 및 PZT의 밀도를 Table 2의 디더 스폴크 길이 구간별 무게 계산식에 대입하여 Eq. (41)과 같이 구할 수 있다.

$$m = \sum_{i=1}^5 m_{si} \quad (41)$$

휨 강성 EI는 Eq. (39)를 이용하여 계산이 가능하나 변위 함수인 Eq. (40)을 먼저 구해야 한다. Eq. (40)은 디더 끝단에 물체가 없는 경우와 물체가 부착된 경우의 경계조건이 다르고 디더를 단순 외팔보(clamped-free)로 모델링할지 혹은 지지 외팔보(clamped-supported)로 모델링 할지에 따라서도 다르기 때문에 이를 감안하여 Eq. (40)의 계수를 유도하면 Table 3과 같다. Table 3에서 디더 끝단에 물체가 없는 경우의 경계조건을 만족하는 계수의 계산이 비교적 쉬워지나 물체가 매달린 경우에는 Eqs. (17, 18, 24, 25)에 Eq. (40)을 대입하여 계산하여야 한다. 계수 중에  $J_{zz}$ ,  $M$ 은 Eq. (33)을 이용하여 계산되고 무게 관련 계수  $M_{dx}$ 는 Fig. 6에서의 각각 모델의 x 방향 이격거리와 Eqs. (27, 29, 30)의 각각 모델의 무게와의 곱으로  $M_{dx} = m_{a1}d_{x1} + m_{a2}d_{x2} + m_{a3}d_{x3}$ 와 같이 계산 가능하다. 이외에  $\lambda L$ 은 Eqs. (20, 26)의 행렬식이 영이 되는  $\lambda L$ 을 구하면 된다. 이에 대한 시뮬레이션 결과를 그림으로 나타내면 Figs. 9, 10과 같다. Fig. 9는 디더 스폴크를 단순 외팔보로 모델링 한 경우 Eq. (20)의  $\lambda L$ 에 대한 행렬식의 값이고 Fig. 10은 지지 외팔보에 대한 결과이다. Figs. 9와 10에서 나타난 바와 같이 행렬식이 0이 되는 지점의  $\lambda L$  값을 구해보면 단순 외팔보의 경우 0.531이고 지지 외팔보의 경우 0.564임을 확인할 수 있다. 이 값이 Eq. (11)에서 1차 고유 주파수를 계산하기 위한 계수로 이용된다.

디더 끝단에 물체가 부착된 경우의 경계조건을 결정하는 계수를 이용하여 Eq. (40)의 계수를 구하면 Table 3과 같다. Table 3에서 알 수 있듯이 경계조건에 따라 Eq. (40)의 계수가 많이 달라짐을 확인할 수 있으며 이를 Eq. (39)에 대입하여 등가 EI인  $(EI)_{eq}$ 를 구할 수 있으며 이를 정리하면 Table 3의 마지막 열과 같다. 그리고 디더 고유 주파수의 요구 조건인 800 Hz 이상을 만족하기 위해 최종 설계된 수치는 Table 4와 같다. Table 4에서 단일 디더를 구성하는 모델인 디더 스폴크, 사이로 장착부 및 링레이저 자이로에 대한 수치를 구분하여 표기하였다.

Table 3의 등가 EI와 Table 4의 디더 스폴크에 대한 수치 그리고 Figs. 1과 2의  $\lambda L$  값을 Eq. (11)에 대입하여 구한 단일 디더의 고유 주파수를 정리하면 Table 5와 같다. Table 5의 결과는 외팔보

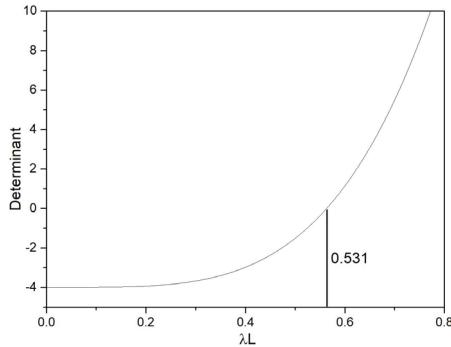


Fig. 9. Determinant of Eq. (20).

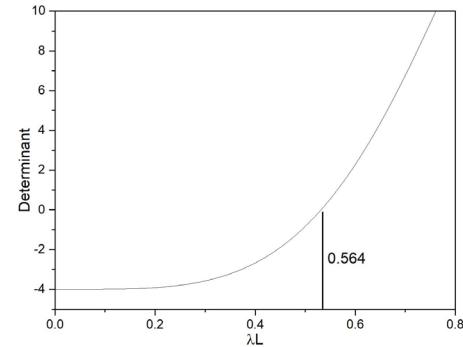


Fig. 10. Determinant of Eq. (26).

Table 4. Parameter values of designed cluster dither model.

Type of model	Parameter of Eqs. (27-32, 35, 36) and Table 2						
Dither spoke	Parameter	L	h	m	$t_b$	$t_p$	$t_f$
$M_1$	Parameter	$J_{zz1}$	$m_{a1}$	$d_{x1}$	$d_{y1}$	$d_{z1}$	$\psi$
	Value	$1.548e-5$	14 g	9 mm	3 mm	0	$60^\circ$
$M_2$	Parameter	$J_{zz2}$	$m_{a2}$	$d_{x2}$	$d_{y2}$	$d_{z2}$	$\psi$
	Value	$3.362e-5$	20 g	5 mm	10.5 mm	0	$60^\circ$
$M_3$	Parameter	$J_{zz3}$	$m_{a3}$	$d_{x3}$	$d_{y3}$	$d_{z3}$	$\psi/\theta$
	Value	$4.858e-5$	71 g	1 mm	21 mm	9 mm	$60^\circ/64^\circ$

Table 5. Natural frequency according to cluster dither model.

No. of model	Type of cluster dither model	Boundary condition	Natural frequency from Eq. (11)
1		Eqs. (6a, b)	1026.6
2	Clamped-free	Eqs. (6a, 17, 18)	929.6
3		Eq. (13)	927.6
4	Clamped-supported	Eqs. (6a, 24, 25)	872.2

의 종류 및 경계조건을 구분하여 정리하였으며 표에서 알 수 있듯이 단일 디더의 형상에 따른 모델링 방법 및 경계 조건에 따라 고유 주파수 계산결과가 많이 상이함을 확인할 수 있다.

Table 5의 계산 결과를 검증하기 위하여 M&S 도구인 Solidworks를 이용하여 해석을 수행하였다. 해석을 위하여 Fig. 2의 구성품과 동일한 구조 특성을 가지고도록 각각의 구성품을 모델링하였으며 Solidworks 기능적인 한계로 디더 스포크를 단순 외팔보로 모델링하고 경계조건은 Eqs. (6a, b)만을 가정하여 시뮬레이션을 수행하였다. Solidworks는 정적 해석 전용 도구로 동적 해석을 위해서는 다른 M&S 도구가 요구된다. 향후 동적 해석 가능한 M&S 도구가 확보되면 Tables 5, 6의 2~4번 모델에 대한 추가 M&S를 수행할 예정이다. Solidworks를 이용한 해석 결과를 그림으로 나타내면 Fig. 11과 같다. Fig. 11에서 원형의 구조체가 자이로 몸체와 동일한 관성 모멘트를 가지고도록 설계된 의사 자이로 몸체이다. 해석을 통하여 구한 최종 고유 주파수는 977.21 Hz로 Table 5의 이론적으로 계산한 고유 주파수 1026.6 Hz와 약 49 Hz의 차이가 발생한 것으로 나타났다. 이에 대한 원인을 상세 분석한 결과 이론적으로 고유 주파수를 분석한 경우에는 자이로 몸체를 육면체로 모델링하고 Eq. (32)를 이용하여  $J_{zz3}$ 을 계산하였다. 그러나 Solidworks에서는 자이로 몸체를 세부 모델링하여  $J_{zz3}$ 을 구하였으며 이 값을 상호 비교한 결과 Solidworks에서 계산한 값이 약 13.5% 큰 것으로 확인되었다. 이는 자이로 몸체에 부착된 전극,

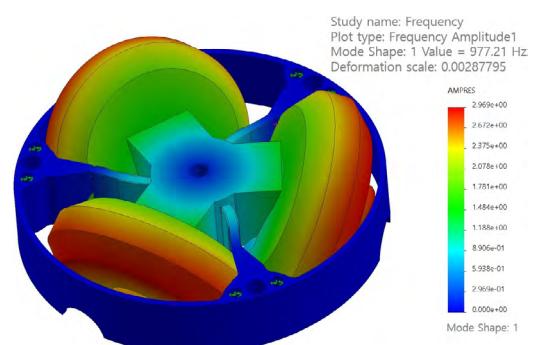
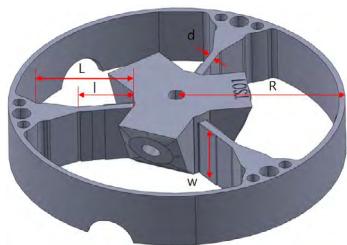


Fig. 11. M&amp;S result of cluster dither.

반사경 조립체에 의해 z축 관성 모멘트가 증가한 것으로 확인되었으며 x, y축도 유사한 차이를 보였으나 관성 모멘트 값이 크지 않아 고유 주파수 계산에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 확인되었다. Solidworks에서 계산된 자이로 몸체의 z축 관성 모멘트를 이용하여 Table 5와 같이 단일 디더의 고유 주파수를 계산한 결과를 정리하면 Table 6과 같다. Table 6의 1번 모델에서 이론적으로 계산한 고유 주파수가 988.4 Hz이며 이는 Solidworks에서 구한 고유 주파수와 약 11 Hz 차이가 발생하여 고유 주파수 계산 차이가 크게 감소한 것으로 확인되었다. 이러한 결과는 Figs. 7과 8

**Table 6.** Natural frequency from moment of inertia of Solidwork RLG model.

No. of model	Type of cluster dither model	Boundary condition	Natural frequency from Eq. (11)
1	Clamped-free	Eqs. (6a, b)	988.4
2	Clamped-free	Eqs. (6a, 17, 18)	895.1
3	Clamped-supported	Eq. (13)	870.6
4	Clamped-supported	Eqs. (6a, 24, 25)	849.7

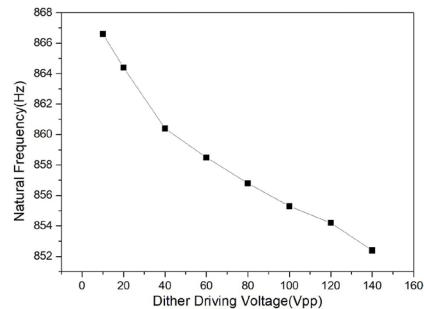
**Fig. 12.** The design result of cluster dither.

의 이론적 모델과 Fig. 11의 Solidworks 모델 간의 차이에 의해 발생한 것으로 분석을 통하여 확인되었다. 이러한 결과로 판단할 때 이 논문의 이론적인 분석결과가 타당하다고 사료된다.

설계된 단일 디더는 제작을 통하여 설계의 타당성 및 정상동작 여부를 검증하기 위하여 Fig. 11과 같이 제작되었으며 이를 그림으로 나타내면 Fig. 12와 같다. 제작된 단일 디더는 디더 구동 전압을 가변하며 시험을 수행하였으며 시험을 통해 구한 단일 디더 고유 주파수는 Fig. 13과 같이 디더 구동 전압에 따라 변하며 약 852~868 Hz를 가지는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 Table 5의 1, 2번 모델 고유 주파수 계산 결과 및 Fig. 11의 Solidworks에서 구한 고유 주파수 M&S 결과와 많은 차이가 있음을 보여준다. 따라서 Table 3의 1, 2번 모델로 단일 디더를 모델링하는 것이 타당하지 않은 것으로 확인되었다. 그러나 Table 5의 4번 모델로 가정하여 이론적으로 구한 고유 주파수인 872.2 Hz와는 약간의 차이는 발생하나 Fig. 13의 시험결과와 근접하는 값이 산출됨을 확인하였다. 또한 Table 6에서 알 수 있듯이 Solidworks에서 구한 자이로 몸체의 z축 관성 모멘트를 적용하는 경우 4번 모델 고유 주파수가 849.7 Hz로 시험결과와 거의 동일함도 확인하였다. 이러한 결과로 판단할 때 단일 디더는 Table 3의 4번 모델로 고유 주파수 해석을 수행하는 것이 가장 정확함을 확인할 수 있었다.

## 5. 결론

이 논문은 단일 디더의 형상에 따른 고유 주파수 특성 분석 연구 결과를 제시하였다. 이를 위하여 다양한 경계조건에서의 외팔보 고유 주파수 계산식을 유도하였으며 해석의 용이성을 높이기 위하여 단일 디더 1축을 디더 스포크 모델, 자이로 장착부 2개 모델, 링레이 자이로 모델 합하여 총 4개의 모델로 나누고 이를 기반으로 고유 주파수 해석에 필요한 수식을 새로이 유도하였다. 새로 유도된 수식을 기반으로 링레이저 자이로의 락인 영역에 의한 성능저하를 막기 위하여 단일 디더의 고유 주파수가 800 Hz 이상이 되도록 단일 디더를 설계하였다. 설계된 단일 디더는 단일 디더의 경계조건 별로 변수 값을 구하고 이를 적용하여 단일

**Fig. 13.** Natural frequency test result of manufactured cluster dither.

디더 고유 주파수를 이론적으로 분석하였다. 단일 디더 고유 주파수 분석은 디더 스포크를 단순 외팔보 및 지지 외팔보로 모델링하고 각각의 모델에 대하여 디더 스포크 끝단에 물체가 부착되지 않은 경우 및 부착된 경우를 고려하여 총 4가지 경우에 대해서 수행하였다.

이론적으로 분석한 고유 주파수의 정확성을 검증하기 위하여 Solidworks 해석도구를 이용한 일부 형상에 대한 M&S 및 단일 디더의 제작 시험을 통하여 구한 고유 주파수와 비교 분석하였다. 비교 분석 결과 단일 디더는 지지 외팔보로 모델링하고 디더 스포크 끝단에 물체가 부착된 경우의 경계조건을 적용하여 이론적으로 해석했을 때가 가장 실제 시험결과와 유사함을 확인하였으며, 이러한 결과는 이 논문에서 제시한 고유 주파수 특성 분석 결과가 타당함을 검증하는 결과이다. 또한 이 논문에서 설계된 단일 디더가 단일 디더의 고유 주파수 요구조건인 800 Hz 이상을 만족하는 약 850 Hz의 고유 주파수를 가짐도 확인하였다.

## ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by Basic Science Research Program through Agency for Defense Development funded by Defense Acquisition Program Administration (DAPA).

## AUTHOR CONTRIBUTIONS

The Manuscript with several authors, a short paragraph specifying their individual contributions must be provided. The following statements should be used “conceptualization, C. J. Kim and J. E. An; methodology, C. J. Kim; software, C. J. Kim; validation, C. J. Kim, J. E. An, H. Yu and K. Shim; formal analysis, C. J. Kim and J. E. An; investigation, C. J. Kim;

resources, C. J. Kim and J. E. An; data curation, C. J. Kim and J. E. An; writing—original draft preparation, C. J. Kim; writing—review and editing, C. J. Kim and J. E. An; visualization, C. J. Kim and J. E. An; supervision, C. J. Kim and J. Park; project administration, H. Yu, K. Shim and C. J. Kim; funding acquisition, H. Yu and K. Shim". Authorship must be limited to those who have contributed substantially to the work reported.

## CONFLICTS OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

## REFERENCES

- Anderson, G. L. 1978, Natural Frequencies of a Cantilever with an Asymmetrically Attached Tip Mass, *AIAAJ*, 16, 281-282. <https://doi.org/10.2514/3.7522>
- Aronowitz, F. 1999, Fundamentals of the Ring Laser Gyro, RTO AGARDograph 339.
- Bhat, R. & Kulkarni, M. A. 1976, Natural Frequencies of a Cantilever with Slender Tip Mass, *AIAAJ*, 14, 536-537. <https://doi.org/10.2514/3.7123>
- Hanse, J. G. 1992, Cluster Dither Apparatus, U.S. Patent 5173745.
- Lee, D.-C., Moon, G., & Lee, J.-C. 2002, Mechanical Dither Design for Ring Laser Gyroscope, *KSME Int. J.*, 16, 485-491. <https://doi.org/10.1007/BF03185078>
- Lee, D.-C., Shin, D.-I., Kim, Y.-S., Lee, J.-Y., & Han, C.-S. 2009, Modelling the Mechanical Dither of a Ring Resonator, *J. Mechanical Engineering Science*, 224, 1185-1191. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1717>
- Lei, X., Wang, Y., Wang, X., Lin, G., & Shi, S. 2021, Revisited on the Free Vibration of a Cantilever Beam with an Asymmetrically Attached Tip Mass, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, Article ID 8024879. <https://doi.org/10.1155/2021/8024879>
- Li, Y. 2013, Mechanical Design on Finite Element Method for Ring laser Gyroscope, *Applied Mechanics and Materials*, 421, 116-121. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.421.116>
- Moon, S.-P. & Hong, S.-J. 2008, Fundamental Natural Frequency Analysis of Stepped Cantilever Beams by Equivalent Beam Transformation Technique, *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 24, 401-410. <https://koreascience.kr/article/JAKO200816263469115.do>
- Rao, S. 2004, Mechanical Vibration, 4th ed. (New Jersey: Pearson Education, Inc.)
- Siouris, G. M. 1993, Aerospace Avionics Systems, A Modern

Synthesis (San Diego: Academic Press, Inc.).

Timoshenko, S., Young, D. H., & Weaver, Jr., W. 1974, *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed. (New York: John Wiley & Sons, Inc.)

Xiong, Z., Yu, X., & Long, X. 2016, Parametric Design for the Peak Amplitude of a Mechanical Dithering Ring Laser Gyroscope, *Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 51, 445-453. <https://doi.org/10.3233/JAE-160031>

Yu, X., Wei, G., Long, X., & Tang, J. 2013, Finite Element Analysis and Optimization of Dither Mechanism in Dithered Ring Laser Gyroscope, *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing*, 14, 415-421. <https://doi.org/10.1007/s12541-013-0057-3>



**Cheon Joong Kim** received the M.S. degrees in Electronics Engineering from Chungnam National University in 1993. Since 1993 he has been working with Agency Defense Development and is currently a chief researcher. His interesting research area is inertial and integrated navigation.



**Jun Eon An** received the Doctor's degree in Electronics Engineering from Kyungpook National University in 2020. He is now working in Agency for Defense Development. His research interests include Navigation System design and Inertial Sensor technologies.



**Haesung Yu** received the Doctor's degree in Electronics Engineering from Chungnam National University in 2021. He is now working in Agency for Defense Development. His research interests include Navigation System design and Inertial Sensor technologies.



**Kyumin Shim** received the Doctor's degree in Physics of Optics from Chungnam National University in 2000. He has been being with Agency Defense Development since 1992. His research interests include sensors based on optics and atomic physics.



**JunMin Park** received the Doctor's degree in Electrical and Electronics Engineering from PSTECH in 2019. He was a principal researcher at POSLAB from 2019 to 2021. He is now an assistant professor at Chungnam National University since 2021. His research interests include control theory, cyber-physical system and inertial navigation system.